SOLUÇÕES

ANÁLISE MATEMÁTICA II

Licenciatura MAEG

Época Recurso – 1 de Julho de 2019

I

$$g(x) = P\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} \underset{|x|<1}{=} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} + C$$

$g(1^-) = 0 \Leftrightarrow C = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$, que é uma série de Mengoli. Obtém-se assim, $g(x) = -1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \quad \forall_{x\in[-1,1]}$.

II

a)
$$\begin{aligned} D_f &= \left\{(x,y)\in\Re^2 : y - x^2 > 0 \wedge \log\left(x^2 + (y-1)^2\right) \neq 0 \wedge x^2 + (y-1)^2 > 0\right\} \\ &= \left\{(x,y)\in\Re^2 : y > x^2 \wedge x^2 + (y-1)^2 \neq 1 \wedge (x,y) \neq (0,1)\right\} \end{aligned}$$

$A = \left\{(x,y)\in\Re^2 : y > x^2 \wedge x^2 + (y-1)^2 < 1 \wedge (x,y)\neq(0,1)\right\}$.

b) $B = \left\{\left(0, \frac{n+1}{n}\right) : n \text{ é par}\right\} \cup \left\{\left(0, \frac{n-1}{n}\right) : n \text{ é ímpar}\right\}$, se $n = 1$ $(0,0)\notin A$, e $B \subset A \ \forall_{n\geq 2}$. Assim, $p = 2$.

III

a) $\nabla f(-2,1) = (1,0)$

b) $f_x^{'}(a,-1-a)_{a\in\Re} = \begin{cases} 1 & \text{se } a = -2 \\ \infty & \text{se } a \neq -2 \end{cases}$. Deste modo, apenas para $a = -2$ existe $f_x^{'}(a,-1-a)$ e o seu valor é 1.

c) $\nabla f(-2,1)\cdot(1,3) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial(1,3)}(-2,1) = -\frac{1}{2}$.

d) A função não é diferenciável no ponto $(-2,1)$, pois pela alínea anterior, se fosse verificar-se-ia a igualdade. A função não é diferenciável no ponto $(0,-1)$, pois pela alínea b) ficou provado que não existe $f_x^{'}(0,-1)$.

IV

$$D(f \circ g)(1,-1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

V

a)

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4(x+ky) = 0 \\ 4ky^3 - 4k(x+ky) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4x = 0 \\ k = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^3 - x - ky = 0 \\ y^3 - x - ky = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ k = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ k = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ k = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^3 - y^3 = 0 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ k = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ k = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ k = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = y \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = y \\ y = \pm\sqrt{k+1} \end{cases}$$

Pontos críticos em função do parâmetro real *k*,

$\underline{k = 0}$: $(0,y), (1,y), (-1,y)\ \forall_{y \in \Re}$

$\underline{\forall k \in \Re}$: $(0,0)$

$\underline{k \geq -1}$: $\left(\sqrt{k+1}, \sqrt{k+1}\right), \left(-\sqrt{k+1}, -\sqrt{k+1}\right)$.

b) Com $k = 0$, $f(x,y) = x^4 - 2x^2 \equiv g(x)$. Como $f(1,-1) = -1$, então $f(x,y) \geq f(1,-1) \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 \geq 0\ \forall (x,y) \in \Re^2$, o que prova ser um minimizante global logo um extremante global de *f*. Não é o único extremante global pois, por exemplo, são minimizantes globais todos os pontos $(1,y)_{y \in \Re}$.

VI

Por hipótese $v \in C^2(\Omega)$, resta provar que $\Delta v = 0$ em Ω. Seja $(x, y) \in \Omega$, então

$$\Delta v(x,y) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) \underset{f\ holomorfa\, em\, \Omega}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right) =$$

$$= -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x,y) = 0,$$

pois $u \in C^2(\Omega)$ por hipótese, e verifica-se o teorema de Schwarz. Fica provado que *v* é uma função harmónica em Ω.